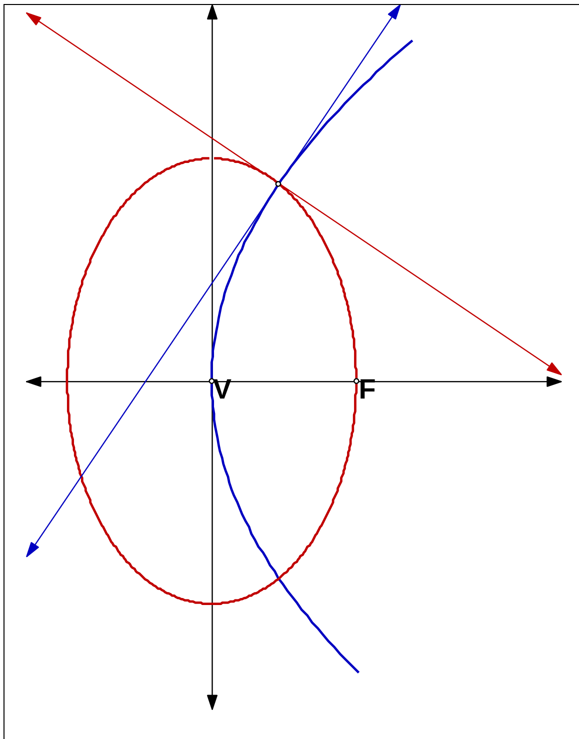
1. El vértice de la parábola $y^2 = 2px$, es el centro de una elipse. El foco de la parábola, es un extremo de uno de los ejes principales de la elipse y además la parábola y la elipse se cortan en un ángulo recto. Hallar la ecuación de la elipse. (Sol. $4x^2 + 2y^2 = p^2$).



Sabemos que la ecuación de la elipse es:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

Por tanto para conocer su ecuación, necesitamos conocer a y b.

Por las hipótesis sobre el vértice V y el foco F de la parábola, tenemos que:

$$a = \frac{p}{2}$$

Así, sólo falta conocer el valor de b.

Para ello requerimos aplicar la hipótesis sobre la perpendicularidad del corte entre la elipse y la parábola.

Para ello nos sirve la derivada, que representa la pendiente de la recta tangente a una curva en un cierto punto.

Derivamos (1) con respecto a x y nos queda:

$$2b^2x + 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Despejando de (2) la derivada, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} = m_1 \qquad (3)$$

(m_1, pendiente de la recta tangente a la elipse en x).

Ahora derivamos la ecuación de la parábola respecto de x:

$$2y\frac{dy}{dx} = 2p \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = m_2 \qquad (4)$$

(m_2, pendiente de la recta tangente a la parábola en x).

Por la hipótesis de perpendicularidad en un cierto punto, tenemos que:

$$m_2 m_1 = -1 \quad (5)$$

Sustituyendo en (5) los valores de (3) y (4):

$$\frac{p}{y}\left(-\frac{b^2 x}{a^2 y}\right) = -1 \;\Rightarrow\; \frac{pb^2 x}{a^2 y^2} = 1 \qquad (6)$$

Sustituyendo ahora en el denominador de (6), el valor de y^2, según la ecuación de la parábola, tenemos que:

$$\frac{pb^2 x}{2pxa^2} = \frac{b^2}{2a^2} = 1 \;\Rightarrow\; b^2 = 2a^2 \qquad (7)$$

Así, sustituyendo (7) en la ecuación (1), tenemos:

$$2a^2x^2 + a^2y^2 = a^2(2a^2) \;\overset{a=\frac{p}{2}}{\Rightarrow}\; \frac{p^2}{2}x^2 + \frac{p^2}{4}y^2 = \frac{p^4}{8}$$

De donde queda:

$$4x^2 + 2y^2 = p^2$$

Que es la ecuación de la elipse buscada.