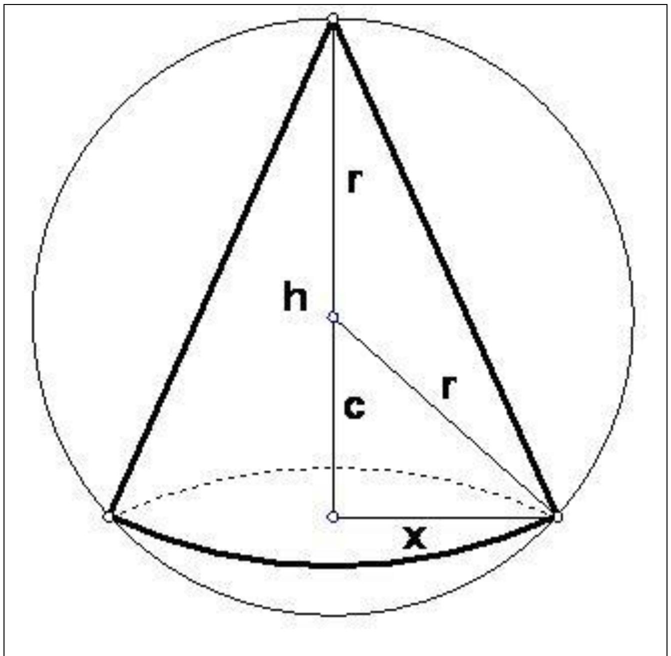
3. Calcular la altura del cono de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio r. (Sol. $h=\frac{4}{3}r$).



Podemos observar que $h=c+r$.

r es fijo, pero c cambia conforme cambia el radio x de la base del cono.

Sabemos que el volumen del cono es igual a:

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 h \qquad (1)$$

Esta cantidad debemos maximizarla y por lo tanto debemos dejarla en términos de una variable. En particular debe quedar en términos de h, que es la incógnita y del radio r de la esfera que contiene al cono. Entonces el objetivo es x, hay que escribirla en términos de h.

Por el Teorema de Pitágoras, tenemos:

$$r^2=x^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=r^2-c^2 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(r^2 - c^2\right)h \qquad (3)$$

Pero como:

$$h = c + r \quad \Rightarrow \quad c = h - r \quad \Rightarrow \quad c^2 = h^2 - 2hr + r^2 \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3), tenemos:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(r^2 - \left(h^2 - 2hr + r^2\right)\right)h \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi\left(2hr - h^2\right)h$$

Es decir:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(2h^2 r - h^3\right) \qquad (5)$$

Que es la fórmula del volumen del cono, pero en términos de la variable h y ahora sí, vamos a maximizar dicho volumen.

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi\left(4rh - 3h^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(4rh - 3h^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad h\left(4r - 3h\right) = 0$$

Es decir:

$$h = 0 \quad o \quad 4r - 3h = 0$$

Pero para que el volumen sea máximo, sólo queda que:

$$h = \frac{4}{3}r$$