Problemas sobre derivadas
Facultad de Ciencias. UNAM

Justificar detalladamente sus respuestas

1. Justificar detalladamente su respuesta a las siguientes preguntas:

a) **¿Qué significa que una función f sea derivable en un punto a?.**

b) **¿Qué significa geométricamente la derivada de una función f en un punto a?.**

c) **Sabiendo que f es derivable en un punto a, ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a))?.**

d) **¿Toda función continua en un punto a, es derivable en a?.**

e) **¿Es necesario que f sea continua en a, para que pueda ser derivable en a?.**

f) **¿Es suficiente que f sea continua en a, para que f sea derivable en a?.**

g) **¿Toda función derivable en a, es continua en a?.**

2. Partiendo directamente de la definición, demostrar que:

a) Si $f(x)=\frac{1}{x}$**, entonces** $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$ **para** $a\neq 0$

b) Si $f(x)=\frac{1}{x^2}$**, entonces** $f'(a)=-\frac{2}{a^3}$ **para** $a\neq 0$

c) Si $f(x)=\sqrt{x}$**, entonces** $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$ **para** $a>0$

3. Encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ **para las siguientes funciones:**

a) $f(x)=\frac{1}{x}$ **para** $a\neq 0$ **b)** $f(x)=\frac{1}{x^2}$ **para** $a\neq 0$ **c)** $f(x)=\sqrt{x}$ **para** $a>0$

4. Resuelva lo siguiente:

a) Si $f(x)=\frac{1}{x}$**, demostrar que la recta tangente a la gráfica en el punto** $(a, f(a))$**, para** $a\neq 0$**, no intersecta a la gráfica en ningún otro punto.**

b) Si $f(x)=\frac{1}{x^2}$**, demostrar que la recta tangente a la gráfica en el punto** $(a, f(a))$**, para** $a\neq 0$**, intersecta a la gráfica en otro punto, que está en el lado opuesto del eje vertical.**

c) Si $f(x)=\sqrt{x}$**, demostrar que la recta tangente a la gráfica en el punto** $(a, f(a))$**, para** $a>0$**, no intersecta a la gráfica en ningún otro punto.**

5. Sea f **derivable. A partir de la definición de derivabilidad, demostrar lo siguiente: (es conveniente hacer un dibujo explicativo):**

a) Si $g(x)=f(x)+c$**, entonces** $g'(x)=f'(x)$

b) Si $g(x)=cf(x)$**, entonces** $g'(x)=cf'(x)$

c) Si $g(x)=bf(x)+c$**, entonces** $g'(x)=bf'(x)+c$

6. Sea f derivable. A partir de la definición de derivabilidad, demostrar lo siguiente: (**es conveniente hacer un dibujo explicativo**):

a) $g(x) = f(x+c) \Rightarrow g'(x) = f'(x+c)$

b) Si $g(x) = f(cx) \Rightarrow g'(x) = cf'(cx)$

c) f **es periódica de período** $a \Rightarrow f'$ **es también periódica, de período** a.

7. Calcular $f'(x)$ **para cada una de las** f **siguientes (sin importar los dominios de** f **y** f'**)**

i) $f(x) = sen(x + x^2)$ **ii)** $f(x) = sen(x) + sen(x^2)$ **iii)** $f(x) = sen(\cos(x))$

iv) $f(x) = sen(sen(x))$ **v)** $f(x) = sen(x + sen(x))$ **vi)** $f(x) = sen(\cos(sen(x)))$

vii) $f(x) = sen\left(\dfrac{\cos(x)}{x}\right)$ **viii)** $f(x) = \dfrac{sen(\cos(x))}{x}$ **ix)** $f(x) = \dfrac{\cos(\cos(x))}{x}$

8. Justificar detalladamente su respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué establece el teorema de Rolle?.

b) ¿Qué establece el teorema del Valor Medio?.

c) ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función:

$$f:[-1,1] \to \mathbb{R} \text{ donde } f(x) = 2x^2 - x - 1.$$

d) ¿Se puede aplicar el teorema del Valor Medio a la función:

$$f:(-0.5,1) \to \mathbb{R} \text{ donde } f(x) = 2x^2 - x - 1?.$$

e) ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función: $f:[-3,3] \to \mathbb{R}$ **donde**

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad si \quad x \neq 2 \quad y \quad f(x) = 5 \; si \quad x = 2$$

9. Justificar detalladamente sus respuestas a las siguientes preguntas:

a) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ **y** $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$**, ¿Qué establece la regla de L'Hôpital?.**

b) ¿Se puede aplicar la regla de L'Hôpital para calcular: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 5x + 2}$ **?.**

c) En el siguiente procedimiento ¿Está bien aplicada la regla de L'Hôpital?

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2 - 3}{2x + 2} = \lim_{x \to -1} \frac{6x}{2} = -3$$

d) ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital?

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6x + 2}{2x - 1} = \lim_{x \to 2} \frac{6x - 6}{2} = 3$$

10. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes curvas en el punto indicado.

a) $f(x) = sen(x)$ **en** $(0,0)$ **b)** $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$ **en** $(0,-1)$

c) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ **en** $x = 1$**,** $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $x^2 + y^2 = 1$ **en** $x = -\dfrac{1}{2}$**,** $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $f(x) = 2\cos(x)$ **en** $(0,2)$ **f)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **en** $x = 1$**,** $y = 1$

11. Para cada una de las siguientes funciones f , hallar $f'(f(x))$

a) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ **b)** $f(x)=sen(x)$ **c)** $f(x)=x^2$ **d)** $f(x)=17$

12. Para cada una de las siguientes funciones f , hallar $f(f'(x))$

a) $f(x)=\frac{1}{x}$ **b)** $f(x)=x^2$ **c)** $f(x)=17x$ **d)** $f(x)=17$

13. Para cada una de las siguientes funciones, hallar el máximo y el mínimo en los intervalos indicados, hallando los puntos del intervalo en que la derivada es cero y comparando los valores en estos puntos, con los valores en los extremos.

a) $f(x)=x^3-x^2-8x+1$ **sobre** $[-2,2]$ **b)** $f(x)=x^3+x+1$ **sobre** $[-1,1]$

c) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$ **sobre** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ **d)** $f(x)=\frac{1}{x^3+x+1}$ **sobre** $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

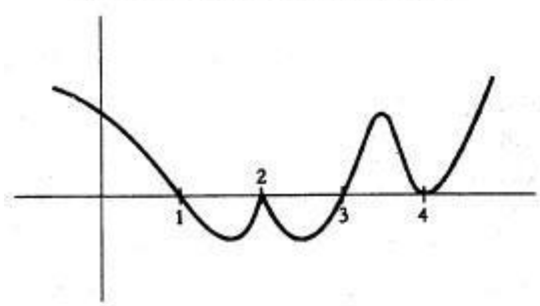
e) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ **sobre** $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ **f)** $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ **sobre** $[0,5]$

14. Utilizar los resultados sobre el significado de la derivada para esbozar la gráfica de las siguientes funciones (aplicar criterios de la primera y segunda derivada)

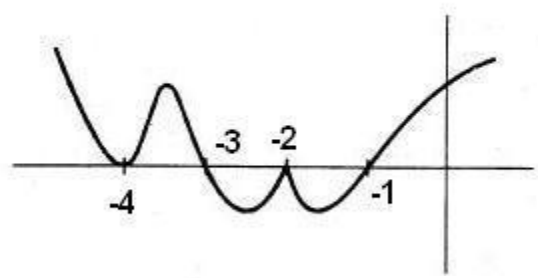
a) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ **b)** $f(x)=x+\frac{3}{x^2}$ **c)** $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$ **d)** $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

15. Cada una de las figuras siguientes, representan la gráfica de la derivada de una función f. Hallar todos los máximos y mínimos locales de la función f correspondiente.

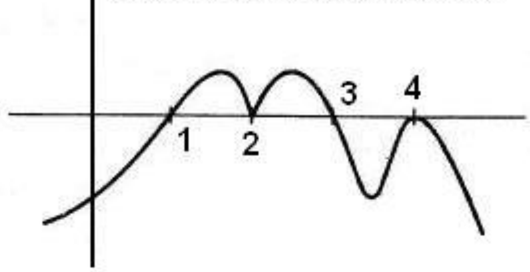
Gráfica de la derivada de f



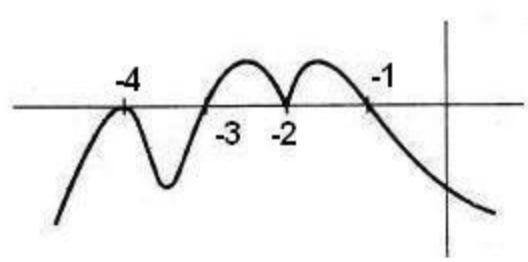
Gráfica de la derivada de f



Gráfica de la derivada de f



Gráfica de la derivada de f



16. Demostrar que:

a) Entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

b) La suma de un número y su recíproco es por lo menos 2.

c) Entre todos los rectángulos de área dada el cuadrado es el de perímetro mínimo.

d) Entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en una circunferencia, el cuadrado es el de área máxima. (Figura 1, página 4 de esta tarea).

e) La razón de variación del volumen de una esfera respecto a su radio, es igual a su área.

17. Calcular los siguientes límites (Analizar si se puede aplicar la regla de L'Hôpital)

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan(x)}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x^2}$ **(c)** $\lim_{x\to 0}\frac{b^2 sen(ax)}{x}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ **e)** $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-4x+2}{5x^2-10x+5}$ **f)** $\lim_{x\to 0}\frac{x-sen(x)}{x^2}$

18. Dadas las siguientes funciones, encontrar un punto que satisfaga el teorema de Rolle.

a) $f:[-2,0]\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x)=x^2+2x+1$ **b)** $f:[0,2]\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x)=x^2-2x+1$

c) $f:[-2,0]\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x)=\frac{1}{x^2+2x+1}$ **d)** $f:[0,2]\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x)=\frac{1}{x^2-2x+1}$

19. Dadas las siguientes funciones, encontrar un punto que satisfaga el teorema del Valor Medio.

a) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x)=x^{4/3}$ **b)** $f:[-1,2]\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x)=x^2-1$

c) $f:[0,2]\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x)=x^3-2x-1$ **d)** $f:[-2,0]\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x)=x^3-2x+2$

20. Encuentre el punto para el cual:

a) La recta tangente a la parábola $f(x)=x^2-7x+3$ **es paralela a la recta** $5x+3y-3=0$**.**

b) la recta tangente a la parábola $f(x)=x^2-7x+3$ **es paralela a la recta** $3x-y-4=0$**.**

c) la recta tangente a la parábola $f(x)=x^2-7x+3$ **es paralela a la recta** $2x+3y-3=0$**.**

21. Hallar la altura del cono de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio r. (Figura 2)

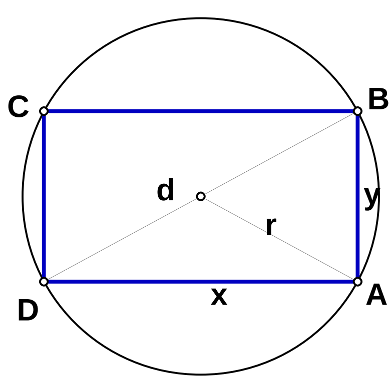


Figura 1

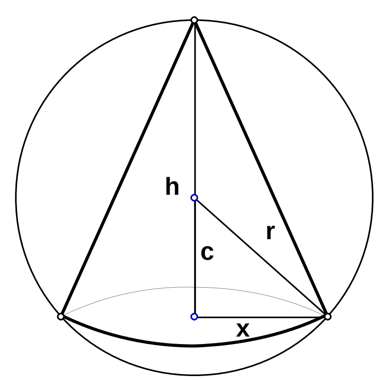


Figura 2

Octubre de 2010.